Løsning til seminar 3 oppgave 1b

Matematisk utledning av effekten av en økning i humankapital på produksjon per arbeider i steady state

Informasjon gitt:

$$Y(t) = A\big(q_L K(t)\big)^{\alpha}\big(q_L L(t)\big)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$\frac{\partial K(t)}{\partial t} = sY(t), \qquad 0 < s < 1$$

Vi ønsker å finne ut: $\frac{\partial y^{ss}}{\partial q_L}$, der y^{ss} er produksjon per arbeider i steady state.

Steg 1. Finn et uttrykk for $\boldsymbol{y(t)}$

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$$

$$y(t) = \frac{A q_K^{\alpha} q_L^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}}{L(t)}$$

$$y(t) = A q_K^{\alpha} q_L^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} L(t)^{-\alpha}$$

$$y(t) = A q_K^{\alpha} q_L^{1-\alpha} \left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)^{\alpha}$$

$$y(t) = A q_K^{\alpha} q_L^{1-\alpha} k(t)^{\alpha}$$

Der $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$

Konklusjon: $y(t)$ avhenger eksogent gitte parametrer (A, q_K, q_L, α) og kapitalintensiteten, $k(t)$. For å finne likevektsnivået på $y(t)$, må vi finne likevektsnivået på $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$.

Steg 2. Finn fram utviklingen i $\boldsymbol{k(t)} = \frac{\boldsymbol{K(t)}}{\boldsymbol{L(t)}}$ over tid. NB: Vi kan bruke to metoder for å finne fram $\frac{\boldsymbol{\partial k}}{\boldsymbol{\partial t}}$. Vi kan enten ta det deriverte direkte av $K(t)/L(t)$ med hensyn på t, eller så kan vi først ta det logaritmerte og deretter det deriverte med hensyn på t. Vi kommer fram til samme resultat. Når funksjonen er så enkel som den er her, velger jeg å ta det deriverte direkte.

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial K}{\partial t} - \frac{K}{L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{1}{L} \cdot \underbrace{\frac{\partial K}{\partial t}}_{sY} - \underbrace{\frac{K}{L}}_{k} \cdot \underbrace{\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial L}{\partial t}}_{n}$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{sY}{L} - n \cdot k$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = sy - n \cdot k$$

Konklusjon: så lenge $sy > n \cdot k$ vil kapitalintensiteten øke ($\frac{\partial k(t)}{\partial t} > 0$). Dette fører til at produksjon per innbygger øker. Kapitalintensiteten vil nå sitt likevektsnivå når $\frac{\partial k(t)}{\partial t} = 0 \rightarrow sy = nk$.

Steg 3. Finn $\boldsymbol{k}$ i likevekt.

Hva er k når $sy = nk$?

Husk at:

$$s \cdot y = s \cdot \underbrace{A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} k^{\alpha}}_{y}$$

$$\rightarrow s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} k^{\alpha} = n \cdot k$$

Samle alle k på en plass ved å dividere igjennom med k^{α}!

$$s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot \frac{k^{\alpha}}{k^{\alpha}} = n \cdot \frac{k}{k^{\alpha}}$$

$$\rightarrow \ s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha} = n \cdot k^{1-\alpha}$$

Bryt ut slik at du får k fritt

$$\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n} = k^{1-\alpha}$$

Hev på begge sider med $\frac{1}{1-\alpha}$ for å få vekk eksponenten til k.

$$\left(\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (k^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{ss}$$

Nå har vi funnet fram nivået på k i likevekt. Dette fører til at vi kan finne y i likevekt.

Steg 5. finn y^{ss}

$$y(t) = Aq_K^{\alpha}q_L^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}$$

$$y^{ss} = Aq_K^{\alpha}q_L^{1-\alpha}(k^{ss})^{\alpha}$$

$$y^{ss} = Aq_K^{\alpha}q_L^{1-\alpha}\left(\left(\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}$$

$$y^{ss} = Aq_K^{\alpha}q_L^{1-\alpha}\left(\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Nå er vi klar til å evaluere effekten av en økning i q_L på y^{ss}

Steg 6. Beregne $\frac{\partial y^{ss}}{\partial q_L}$

$$y^{ss} = Aq_K^{\alpha}q_L^{1-\alpha}\left(\frac{s \cdot A \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_L^{1-\alpha}}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi har q_L på to plasser i ligningen. Det fører til at det blir litt jobb å ta det deriverte. Vi kan gjøre ting enklere for oss ved å samle alle q_L på en og samme plass. Ulempen med dette er at de direkte (direkte økning i y^{ss} som følge av økning i q_L) og indirekte (økning i y^{ss} som følge av økning i kapitalintensitet) effektene ikke blir like tydelige. Likevel, for å gjøre ting enkelt velger jeg å samle termer. Jeg løfter ut alle «teknologi-termer» ut av parentesen. Da jeg gjør dette må jeg ta hensyn til eksponentene.

$$y^{ss} = A q_K^{\alpha} q_L^{1-\alpha} A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \cdot q_L^{\alpha} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Samle termer

$$y^{ss} = A \cdot A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\alpha} \cdot q_K^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \cdot q_L^{1-\alpha} \cdot q_L^{\alpha} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Summere eksponenter for individuelle variabler

$$y^{ss} = A^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} q_L^{1-\alpha+\alpha} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi kan forenkle eksponentene betydelig.

$$1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-\alpha+\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\rightarrow A^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\alpha + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot (1-\alpha)}{1-\alpha} + \frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha \cdot (1-\alpha) + \alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha - \alpha^2 + \alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\rightarrow q_K^{\alpha+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} = q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$q_L^{1-\alpha+\alpha} = q_L^{1}$$

$$\rightarrow y^{ss} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q_L \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\partial y^{ss}}{\partial q_L} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > 0$$

Notere at $A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot {\color{red} q_L} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = y^{ss}$, dette fører til at $A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{S}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{y^{ss}}{\color{red} q_L}$

$$\rightarrow \frac{\partial y^{ss}}{\partial q_L} = \frac{y^{ss}}{q_L} > 0$$

Vi ser at effekten er positiv og at den vil være større jo mindre humankapitalen (q_L) var fra start.

Vi kan nå direkte evaluere effekten av en økning i A. Vi spør oss hvordan en lavere korrupsjon vil påvirke produksjon per innbygger. Dersom vi tolker dette som en økning i A kan vi skrive spørsmålet:

$$\frac{\partial y^{ss}}{\partial A}$$

Vi kan bruke vårt uttrykk for y^{ss} for å evaluere dette.

$$\frac{\partial y^{ss}}{\partial A} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) A^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Vi kan igjen bruke at $A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q_L \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = y^{ss}$.

Notere nå at vi kan skrive om $\frac{\partial y^{ss}}{\partial A}$

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) A^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A^{-1}$$
$$= y^{ss} \cdot \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot A^{-1} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \frac{y^{ss}}{A}$$

Med andre ord:

$$\frac{\partial y^{ss}}{\partial A} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \cdot \frac{y^{ss}}{A} > 0$$

Vi ser at modellen predikerer at effekten av å minke korrupsjonen (øke A) vil være positiv. Effekten vil være større jo lavere A var fra start (dårligere teknologi/høyere korrupsjon) og jo viktigere kapitalen er i produksjonen. Det siste viser den indirekte effekten av at kapitalintensiteten øker som følge av den teknologiske boosten.