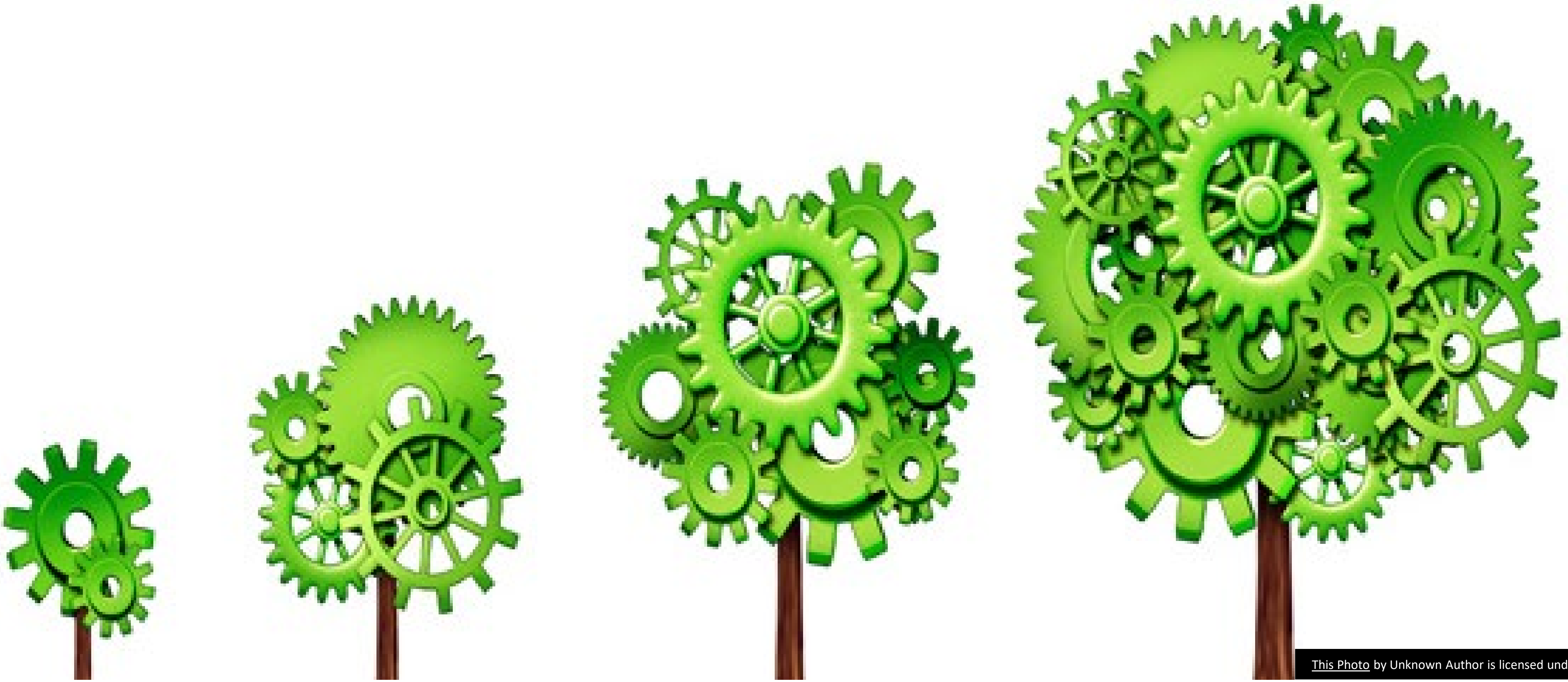


F3. SOK-2011: Økonomisk vekst

Solow-modellen BAS

Solow-modellen

Robert Solow (1924-):
A contribution to the theory of
economic growth

Hva bestemmer nivået på, og veksten i, materiell velferd på lang sikt?

Hvorfor er (blir) noen land rike da andre er (forblir) fattige?

Solow-modellen

Robert Solow (1924-):
A contribution to the theory of economic growth

Solow-modellen ligger til grunn for nesten alle vekst-modeller

Kan tilpasses etter behov – fra svært «enkel» til svært kompleks

SOK-2011:

1. Solow-modellen BAS: To produksjonsfaktorer (arbeid og kapital), ingen teknologi, ingen naturressurser
2. Solow-modellen med teknologi
3. Solow-modellen med teknologi og naturressurser

Solow-modellen BAS

Antakelser

1. Alle bedrifter produserer et homogent gode
2. Fullkommen konkurranse
3. Produksjonen skjer ved bruk av to produksjonsfaktorer: kapital (K) og arbeid (L)
4. Produksjonen er karakterisert av konstant skala-utbytte og avtakende grenseproduktivitet
5. Alle i befolkningen er i arbeid ($L = P$)
6. Befolkningen vokser med en konstant, og eksogent gitt rate (n): $L(t) = L_0 e^{nt}$
7. Sparераten (netto) er eksogent gitt, lik for alle, og kan beskrives som en andel av total inntekt: $S(t) = s \cdot Y(t)$
8. Det er ingen handel med utlandet ($X = M = 0$)

Solow-modellen BAS

Konsum, sparing og investering

$$Y = C + I + G + X - M$$

$G_C + G_I$

Skatt

Netto faktorinntekter til andre land

$$Y = C + S + T + R + F$$

Netto transfereringer til andre land

Solow-modellen BAS

Konsum, sparing og investering

Åpent økonomi: ⇨ $\underbrace{C + I + G_C + G_I + X - M}_{Y} = \underbrace{C + S + T + R + F}_{Y}$

Lukket økonomi: $X - M = 0$ $R + F = 0$

$\Rightarrow$ $\cancel{C} + I + G_C + G_I = \cancel{C} + S + T$

$\underbrace{I^{Privat} + G_I}_{\text{Bruttoinvesteringer}} = \underbrace{S + (T - G_C)}_{\text{Bruttosparing}}$

Bruttoinvesteringer
Gross Domestic investment
GDI

Bruttosparing
Gross Domestic Saving
GNI

Solow-modellen BAS

Sparing og investering

Brutto versus netto

Brutto-investeringer: Alle nyinvesteringer (private og offentlige) som blir gjort i kapital i økonomien

Brutto-sparing: All sparing (privat og offentlig) i økonomien

Netto-investeringer: Nyinvesteringer – forslitning av kapital (kapitalkonsum)

$$\Rightarrow \quad I^N(t) = I^{privat}(t) + G_I(t) - \delta K(t)$$

Netto-sparing: Sparing - kapitalkonsum

$$\Rightarrow \quad S^N(t) = S^{privat}(t) + (T - G_C) - \delta K(t)$$

Solow-modellen BAS

Sparing og investering

Antakelser i pensumboka: $I(t) = I^N(t)$ $S(t) = S^N(t)$

$$\underbrace{I^{privat} + G_I}_{GDI} = \underbrace{S^{privat} + (T - G_C)}_{GDS} \Rightarrow \underbrace{I^{privat} + G_I}_{GDI} - \delta K = \underbrace{S^{privat} + (T - G_C)}_{GDS} - \delta K$$

$I(t) = GDI - \delta K$

Om $I(t) > 0 \rightarrow K(t)\uparrow$

$I(t) < 0 \rightarrow K(t)\downarrow$

$\rightarrow I(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t} \Rightarrow \boxed{s \cdot Y(t) = \frac{\partial K(t)}{\partial t}}$

$\boxed{I(t) = S(t)}$

$S(t) = s \cdot Y(t)$ $0 < s < 1$

Solow-modellen BAS

Produksjon

Alle bedrifter produserer et homogent gode (Y) ved bruk av arbeid (L) og kapital (K) under fullkommen konkurranse

Total produksjon = produksjon av «et gode» Y

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

Produksjon

Fullkommen konkurranse:

Profitt = 0 → $\Pi = F(K,L) - w \cdot L - r \cdot K = 0$

$\Rightarrow \underbrace{F(K,L)}_{Y} = \underbrace{w \cdot L}_{\text{inntekter til arbeid}} + \underbrace{r \cdot K}_{\text{inntekter til kapital}}$

$\Rightarrow$ inntekter fra produksjon fordeles mellom produksjonsfaktorene

$\Rightarrow F(K,L) = Y$ beskriver $\underbrace{\text{konsummuligheter}}_{\text{(materiell) velferd}}$

Solow-modellen BAS

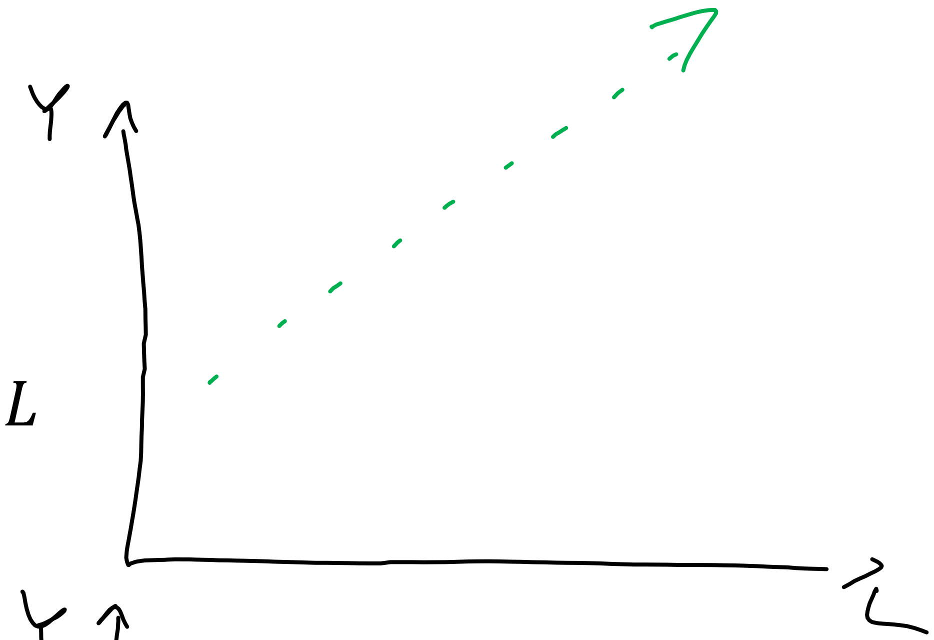
Produksjon

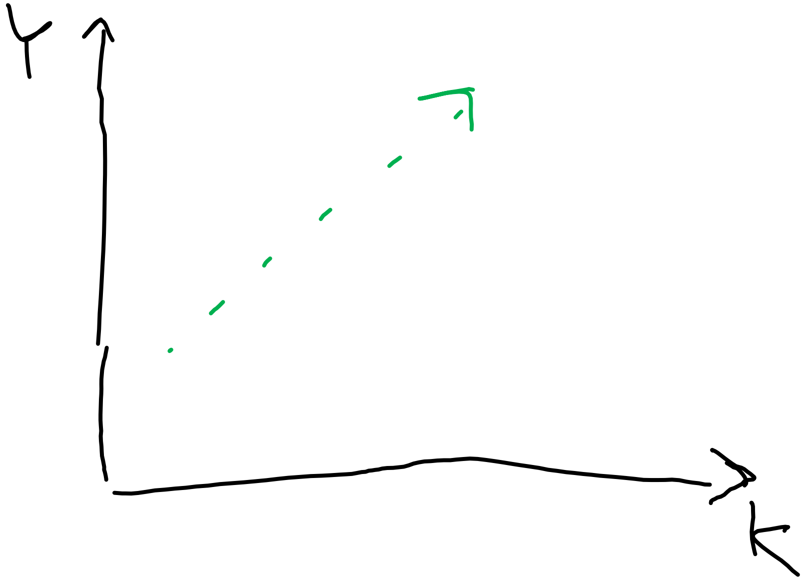
Positiv men avtakende grenseproduktivitet i K og L

Positiv grense-produktivitet

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = MP_L > 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = MP_K > 0$$





Solow-modellen BAS

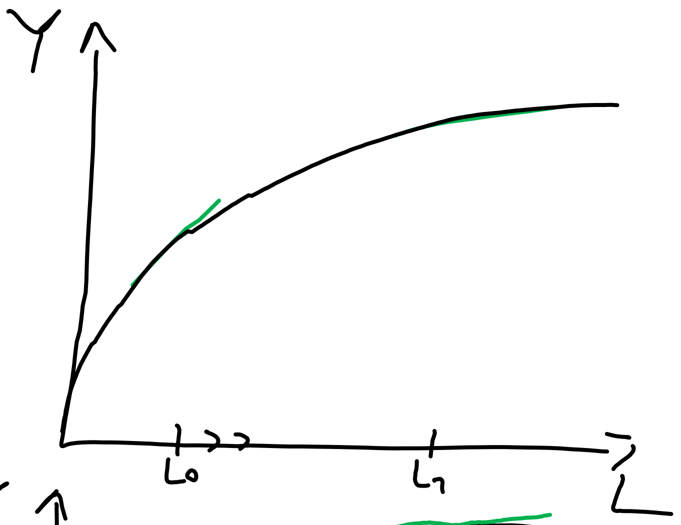
Produksjon

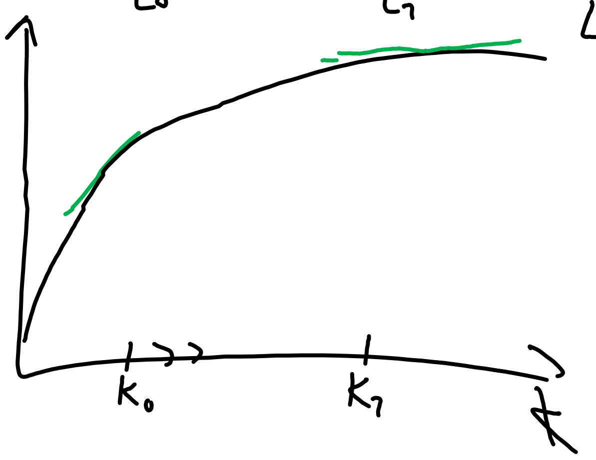
Positiv men avtakende grenseproduktivitet i K og L

Avtakende grense-produktivitet

$$\frac{\partial MP_L}{\partial L} = \frac{\partial\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)}{\partial L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$$

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} = \frac{\partial\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)}{\partial K} = \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$$





Solow-modellen BAS

Produksjon

Positiv men avtakende grenseproduktivitet i K og L

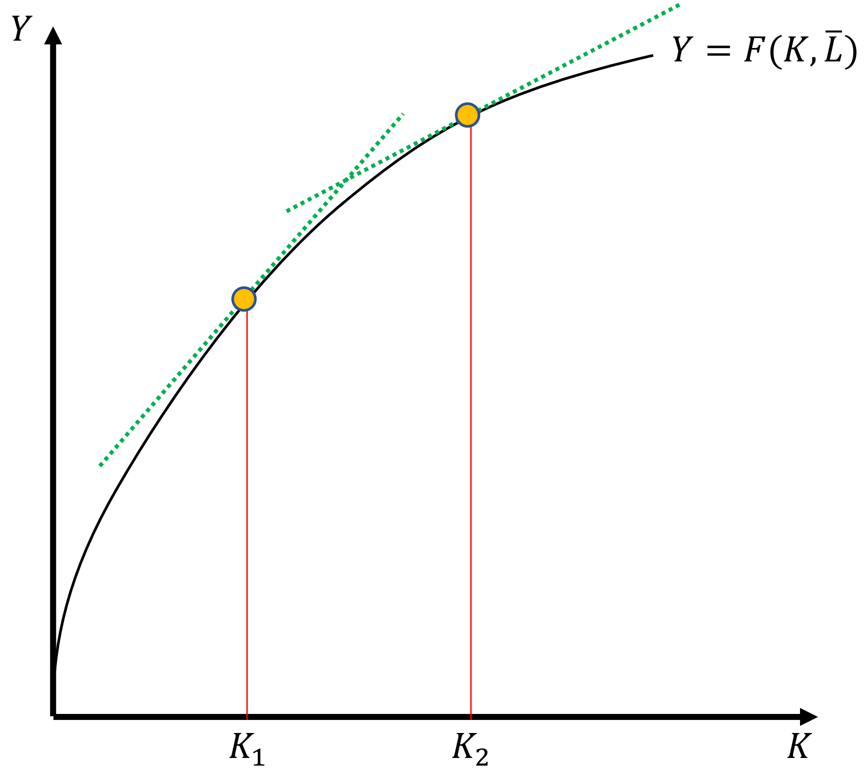
Positiv grense-produktivitet

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \underbrace{\frac{\partial F(K,L)}{\partial K}}_{MP_K} > 0 \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} = \underbrace{\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}}_{MP_L} > 0$$

Avtakende grense-produktivitet

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial L} = \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$$

$$\frac{\partial MP_K}{\partial K} < 0 \qquad \frac{\partial MP_L}{\partial L} < 0$$



Solow-modellen BAS

Produksjon

Konstant skala-utbytte

Hvis mengden kapital (K) øker med **10%** og mengden arbeidskraft (L) øker med **10%** så vil produksjonen (Y) øke med **10%**

Sammenligne med:

Tiltakende skala-utbytte	Avtakende skala-utbytte
Hvis $K \uparrow$ m 10% og $L \uparrow$m 10% så $Y \uparrow$ m **MER** enn 10%	Hvis $K \uparrow$ m 10% og $L \uparrow$m 10% så $Y \uparrow$ m **MINDRE** enn 10%

Solow-modellen BAS

Produksjon per arbeider

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= k(t)^{\alpha} \\ y(t) &= f(k(t)) \end{aligned}}$$

Konstant skala-utbytte og produksjon per arbeider

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} \Rightarrow y = \frac{F(K,L)}{L} \Rightarrow F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

$$k = \frac{K}{L} \Rightarrow y(t) = f(k(t))$$

eksempel: $Y = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

$$\frac{1}{L} = L^{-1}$$

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}}{L} = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \cdot L^{-1}$$

$$= K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha-1} = K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}$$

Solow-modellen BAS

Produksjon per arbeider

Konstant skala-utbytte og produksjon per arbeider

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = f(k), \qquad k = \frac{K}{L}$$

Cobb-Douglas produksjonsfunksjon: $Y = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$

$$y = \frac{K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}}{L} = K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha-1} = K^{\alpha} \cdot L^{-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = k^{\alpha}$$

Cobb-Douglas produksjonsfunksjon med konstant skala-utbytte gir også positiv og avtakende grenseproduktivitet (utfordring: bevise dette!)

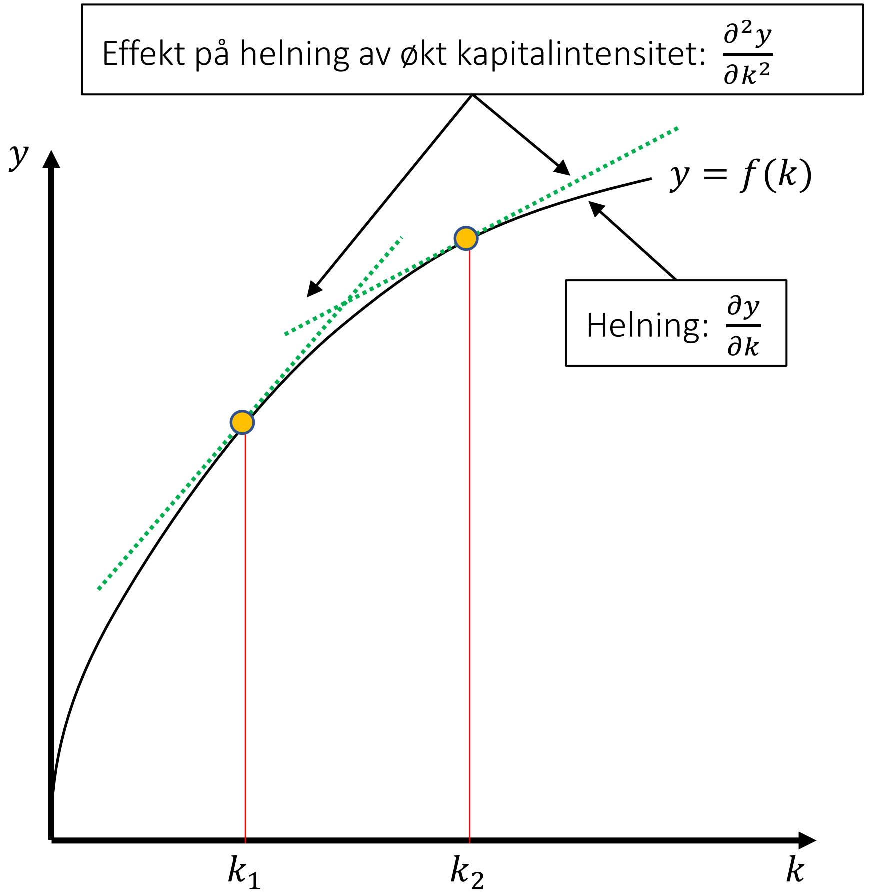
Solow-modellen BAS

Produksjon per arbeider

Generell
$$y = f(k)$$

Spesifikk
$$y = k^{\alpha}$$

Hva skjer med produksjon per arbeider dersom kapital-intensiteten øker?



Solow-modellen BAS

Produksjon per arbeider

Generell
$$y = f(k)$$

Spesifikk
$$y = k^{\alpha}$$

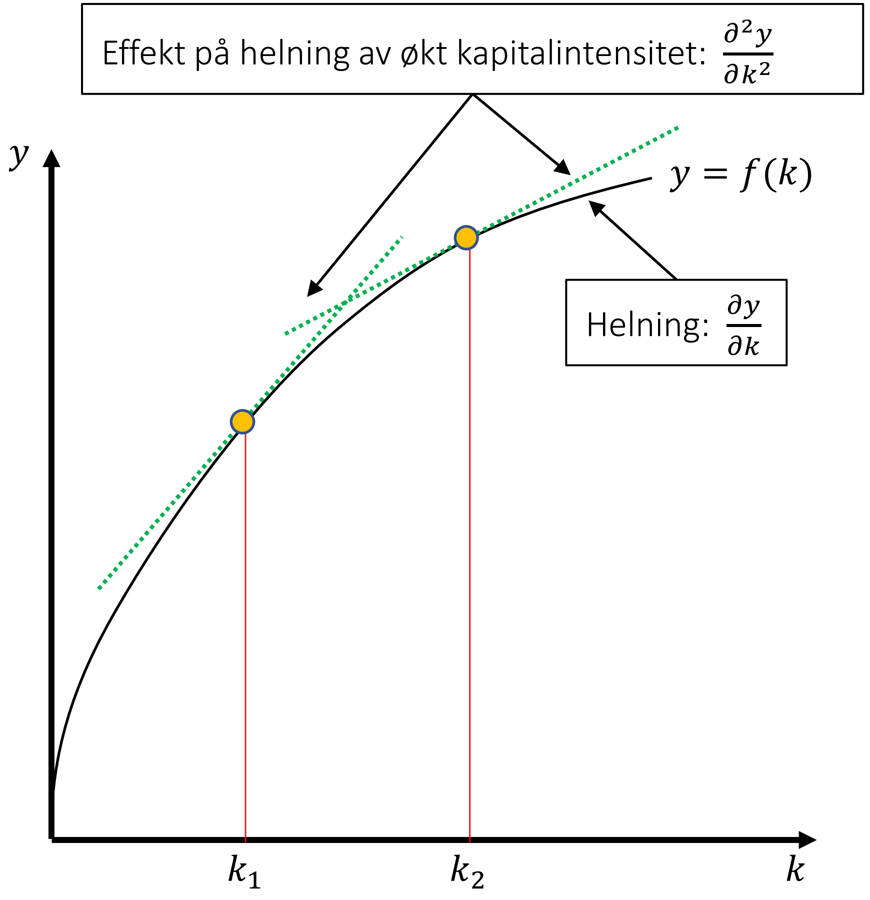
Hva skjer med produksjon per arbeider dersom kapital-intensiteten øker?

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial k} = \alpha \cdot k^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = \frac{\partial f^2(k)}{\partial k^2} < 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = (\alpha - 1) \cdot \alpha \cdot k^{\alpha-2} < 0$$

<u>Tolkning:</u>
Om kapitalintensiteten øker, vil produksjon per innbygger <u>øke</u> (positiv grenseproduktivitet).

Jo høyere kapitalintensiteten er, desto <u>mindre</u> effekt vil en økning i kapitalintensiteten ha på produksjon per arbeider.



Solow-modellen BAS

Vekst i produksjon per arbeidere

Generell

$$y(t) = f(k(t))$$

$$g_y = \frac{\partial y/\partial t}{y}$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial f(k(t))}{\partial k}}_{\frac{\partial y}{\partial k} = MP_k} \cdot \frac{\partial k(t)}{\partial t} = MP_k \cdot \frac{\partial k}{\partial t}$$

$$g_y = \frac{\partial y/\partial t}{y} = \frac{MP_k}{y} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} \cdot \frac{k}{k}$$

multipliser med $\frac{k}{k}$ for å få vekstraten i k

$$g_k = \frac{\partial k/\partial t}{k}$$

$$g_y = \frac{MP_k \cdot k}{y} \cdot g_k$$

σ_k = produksjonselastisiteten til k

$$g_y = \sigma_k \cdot g_k$$

Solow-modellen BAS

Vekst i produksjon per arbeidere

Spesifikk

$$y(t) = k(t)^{\alpha}$$

$$g_y = \frac{\partial y / \partial t}{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \underbrace{\alpha \cdot k^{\alpha - 1}}_{\frac{\partial y}{\partial t} = MP_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y / \partial t}{y} = \frac{\alpha \cdot k^{\alpha - 1}}{k^{\alpha}} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\alpha \cdot k^{\alpha} \cdot k^{-1}}{k^{\alpha}} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} = \alpha \cdot g_k$$

Solow-modellen BAS

Vekst i produksjon per arbeidere

Generell

$$y(t) = f(k(t))$$

Spesifikk

$$y(t) = k(t)^{\alpha}$$

$$\frac{\frac{\partial y(t)}{\partial t}}{y(t)} = \sigma_k \cdot \frac{\frac{\partial k(t)}{\partial t}}{k(t)}$$

$$\frac{\frac{\partial y(t)}{\partial t}}{y(t)} = \alpha \cdot \frac{\frac{\partial k(t)}{\partial t}}{k(t)}$$

$\sigma_k = \frac{\partial y}{\partial k} \cdot \frac{k}{y}$ = partiell produksjonselastisitet = α

<u>Tolkning:</u>
Veksten i produksjon per arbeider drivs av veksten i kapitalintensiteten (capital deepening)

Effekten av økt kapitalintensitet avhenger produktiviteten til kapitalen

Solow-modellen BAS

Kapital per arbeider (kapitalintensitet)

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid? hva bestemmer $\frac{\partial k}{\partial t}$?

1) $$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} = K(t)\cdot L(t)^{-1}$$

2) $$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = \frac{1}{L(t)}\cdot\frac{\partial K(t)}{\partial t} - K(t)\cdot L(t)^{-2}\cdot\frac{\partial L(t)}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\frac{\partial K}{\partial t} - \underbrace{\frac{K}{L}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{L}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}}}_{n}}_{L^2}$$

Husk:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = I(t) = s\cdot Y(t)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{L}\cdot s\cdot Y - k\cdot n$$

$$= s\cdot\underbrace{\frac{Y}{L}}_{y} - kn$$

Solow-modellen BAS

Kapital per arbeider (kapitalintensitet)

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid?

$$\frac{\partial k}{\partial t} = s \cdot \frac{Y}{L} - n \cdot k$$

$$\boxed{\frac{\partial k}{\partial t} = s \cdot y - nk}$$

$$\frac{\partial k / \partial t}{k} = s \cdot \frac{y}{k} - n$$

Solow-modellen BAS

Kapital per arbeider (kapitalintensitet)

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid?

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

Sentral ligning i Solow-modellen!

Solow-modellen BAS

Kapital per arbeider (kapitalintensitet)

Hvordan utvikles kapitalintensiteten over tid?

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

«Faktiske» nettoinvesteringer per arbeider

«Nødvendige» investeringer for å erstatte nye arbeider med kapital

- Dersom de faktiske investeringene er **større** enn de nødvendige (nettoinvesteringene er større enn hva som trengs for å erstatte nye arbeidere), vil kapitalintensiteten øke → produksjon per innbygger øker

- Dersom de faktiske investeringene er **mindre** enn de nødvendige (nettoinvesteringene er ikke store nok for å dekke behovet blant arbeidere), vil kapitalintensiteten minke → produksjon per innbygger minker

Solow-modellen BAS

Konklusjoner så langt

Nivået på BNP per arbeider avhenger nivået på kapital per innbygger (kapitalintensiteten)

Vekst i BNP per arbeider avhenger veksten i kapitalintensiteten

Så lenge kapitalintensiteten vokser, vil BNP per arbeider vokse

Veksten i kapitalintensiteten avhenger størrelsen på faktiske og nødvendige investeringer per innbygger

Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Definisjon av langsiktig likevekt (Steady-state):

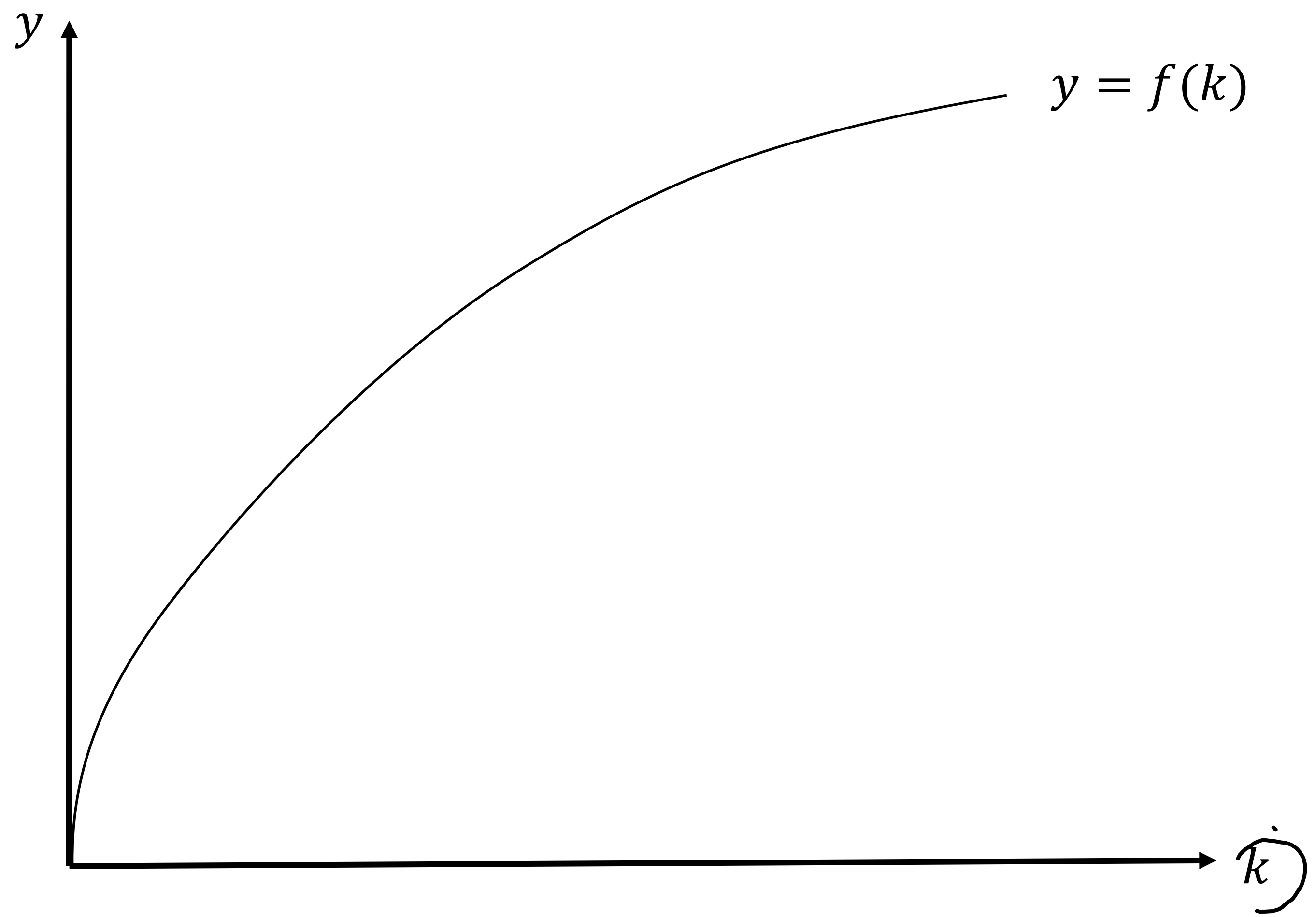
All tilpasning som skjer automatisk, har skjedd

Enten stabil nivå på BNP per arbeider,

eller stabil vekstrate i BNP per arbeider

Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



Så lenge kapitalintensiteten vokser, vil BNP per arbeider vokse

$$g_y = \sigma_k \cdot g_k$$

Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Når er veksten eller nivået på kapitalintensiteten stabil?

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

1. Grafisk utledning av produksjon per arbeider i langsiktig likevekt (steady state)

2. Matematisk utledning av produksjon per arbeider i steady state

Solow-modellen BAS

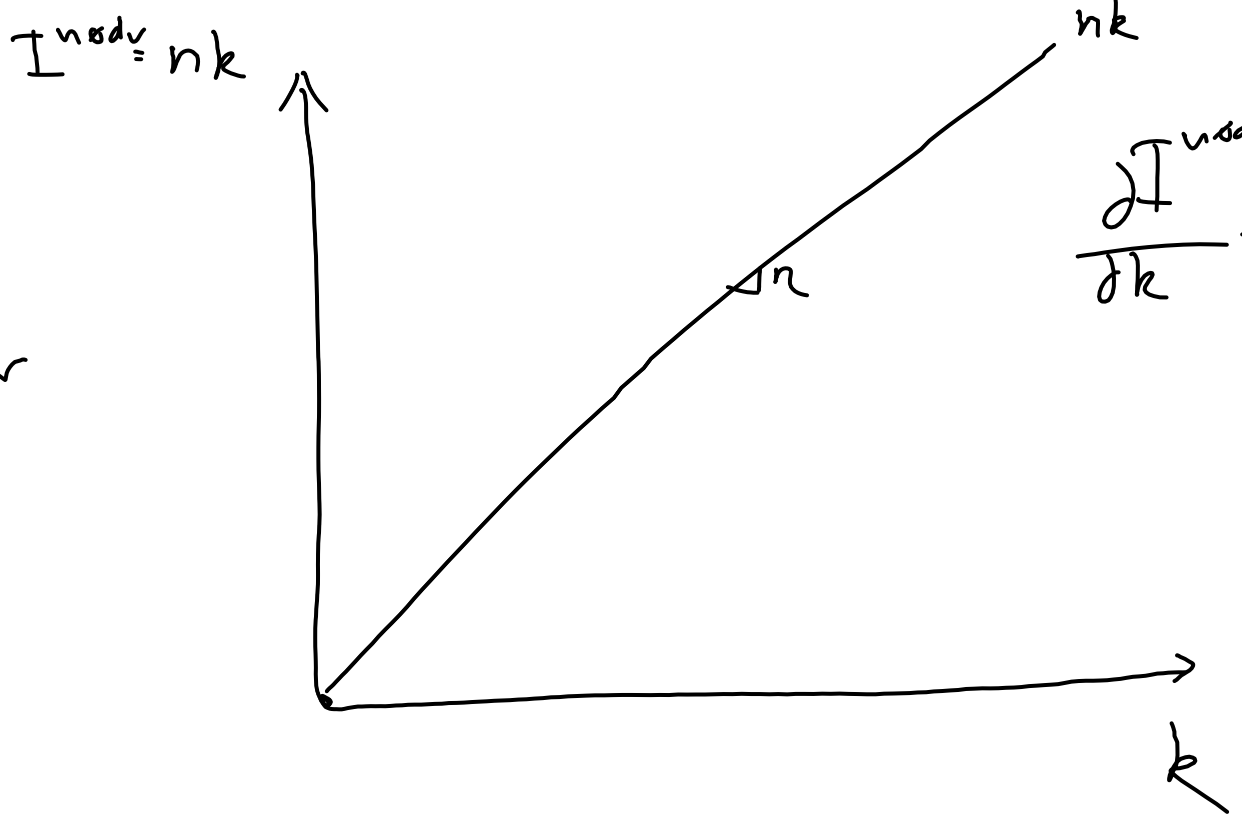
Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Anta at $y = k^{\alpha}$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = s \cdot y - nk$$

1) nødvendige investeringer

$$I^{nødv} = n \cdot k$$



$$\frac{\partial I^{nødv}}{\partial k} = n$$

Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

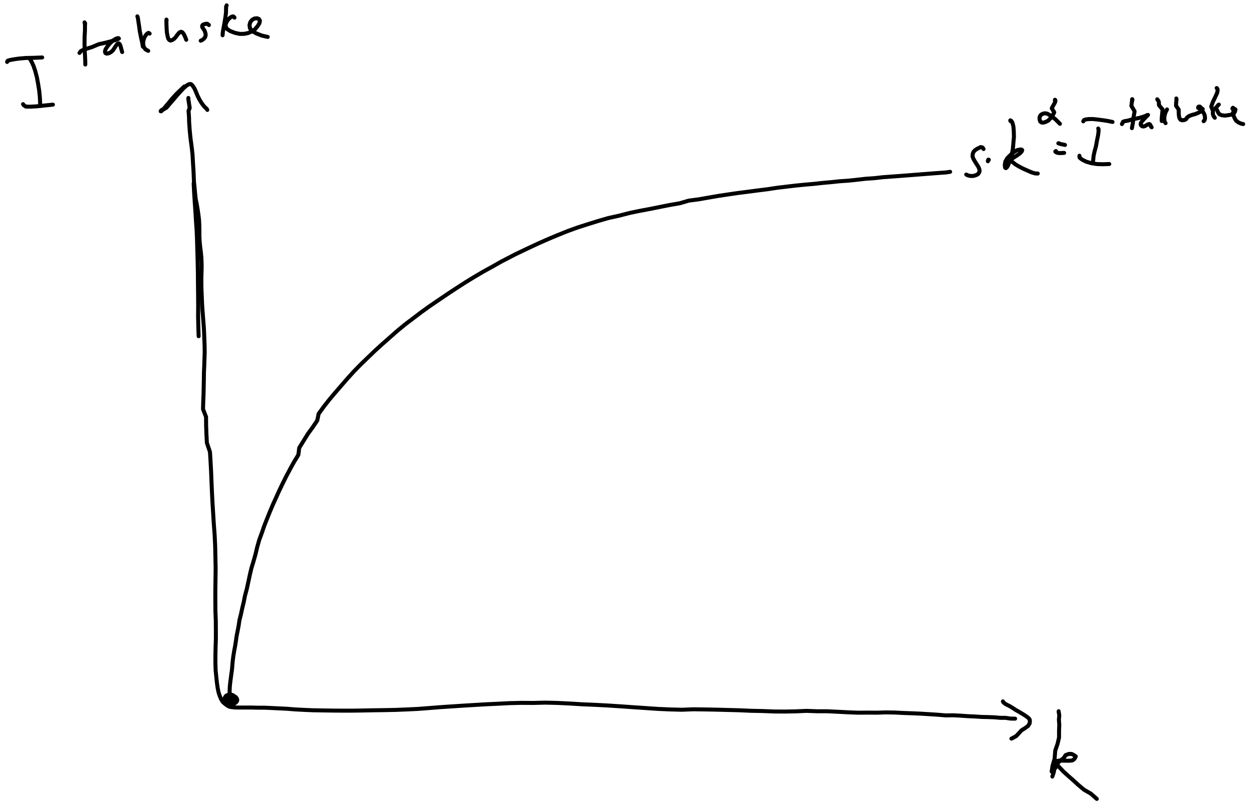
2) Faktiske investeringer

$$I^{faktiske} = s \cdot y$$

$$y = k^{\alpha} \Rightarrow s \cdot k^{\alpha} = I^{faktiske}$$

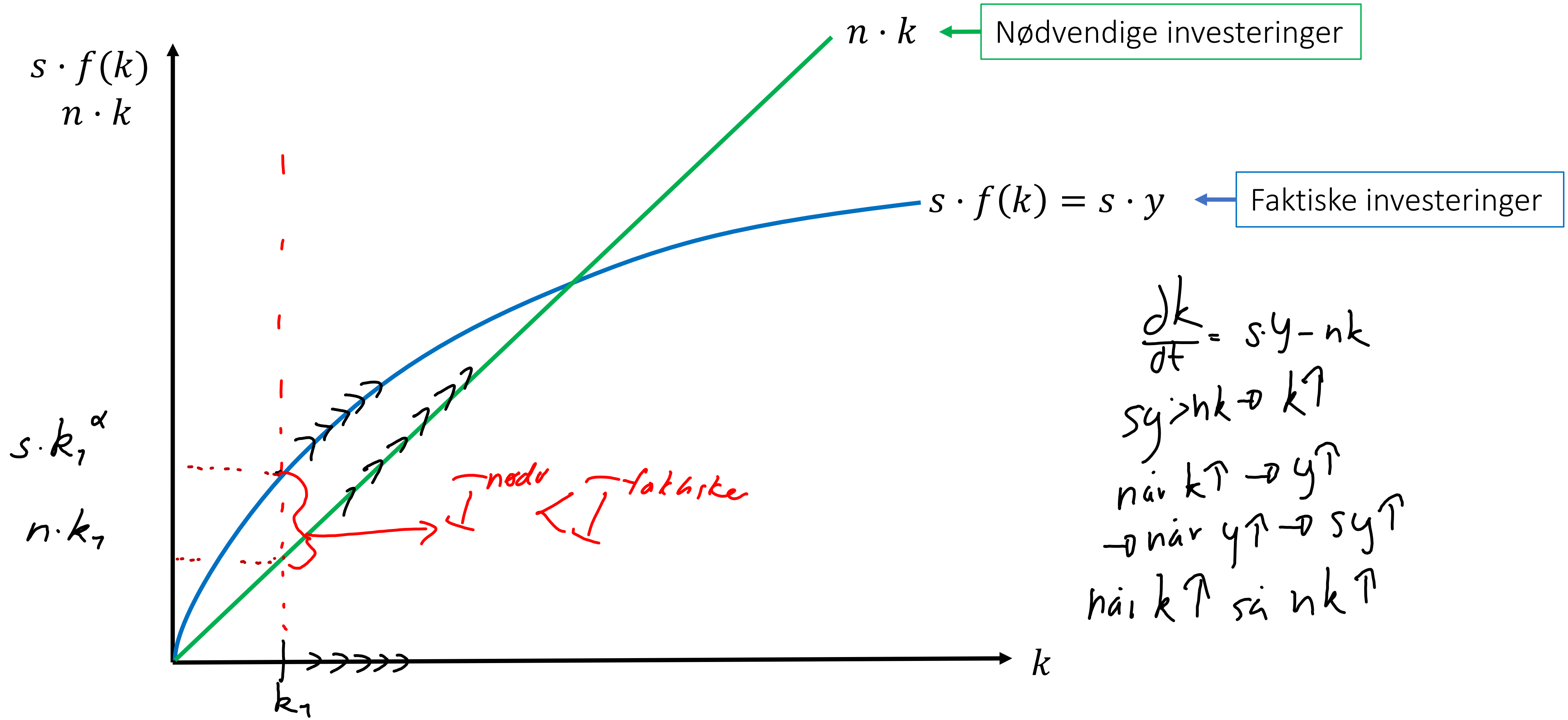
$$\frac{\partial I^{f}}{\partial k} = \alpha \cdot k^{\alpha-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 I^{f}}{\partial k^2} = \underbrace{(\alpha-1)}_{-} \cdot k^{\alpha-2} < 0$$



Solow-modellen BAS

Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



$$\frac{dk}{dt} = s \cdot y - nk$$

$sy > nk \rightarrow k\uparrow$

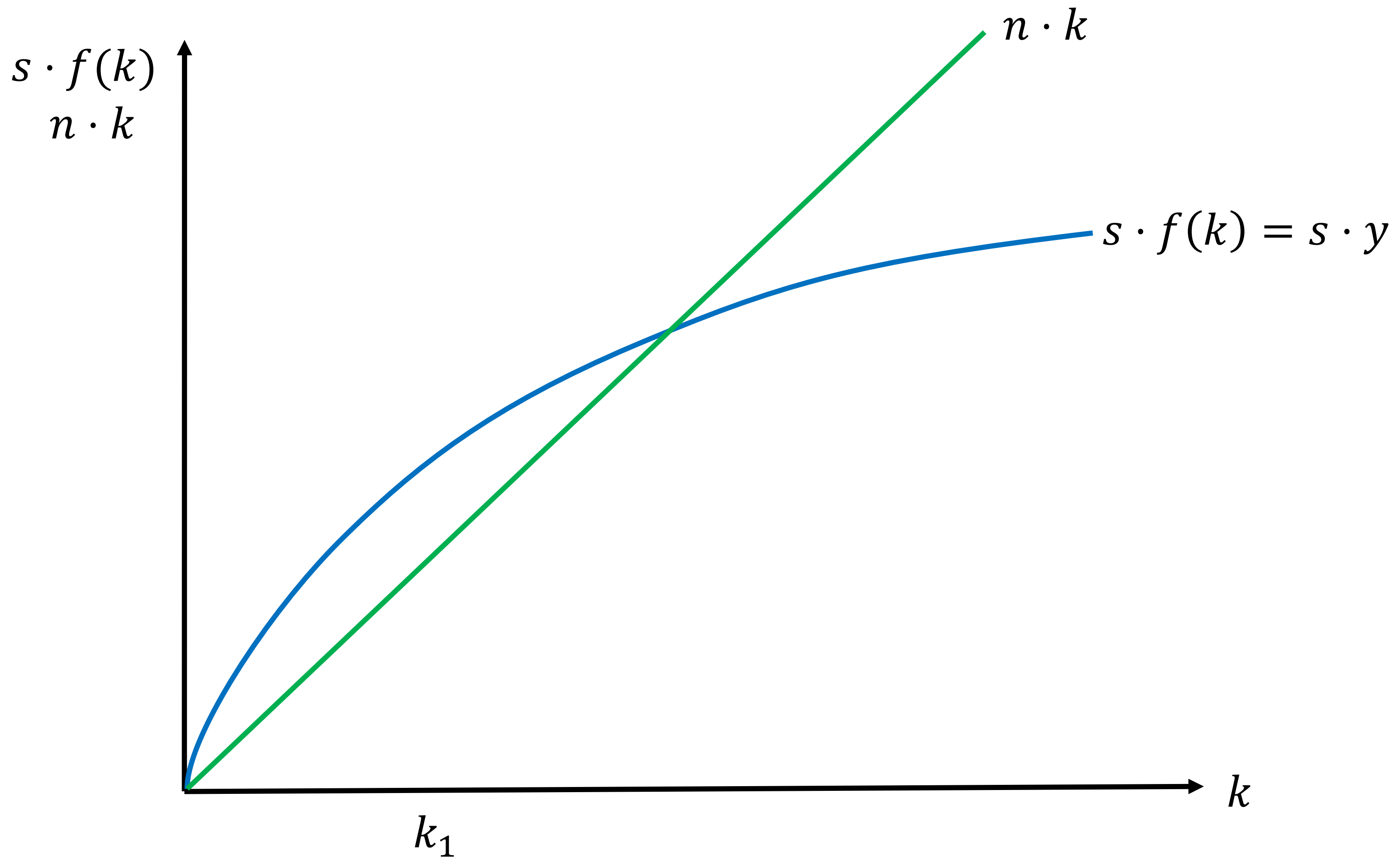
når $k\uparrow \rightarrow y\uparrow$

$\rightarrow$ når $y\uparrow \rightarrow sy\uparrow$

når $k\uparrow$ så $nk\uparrow$

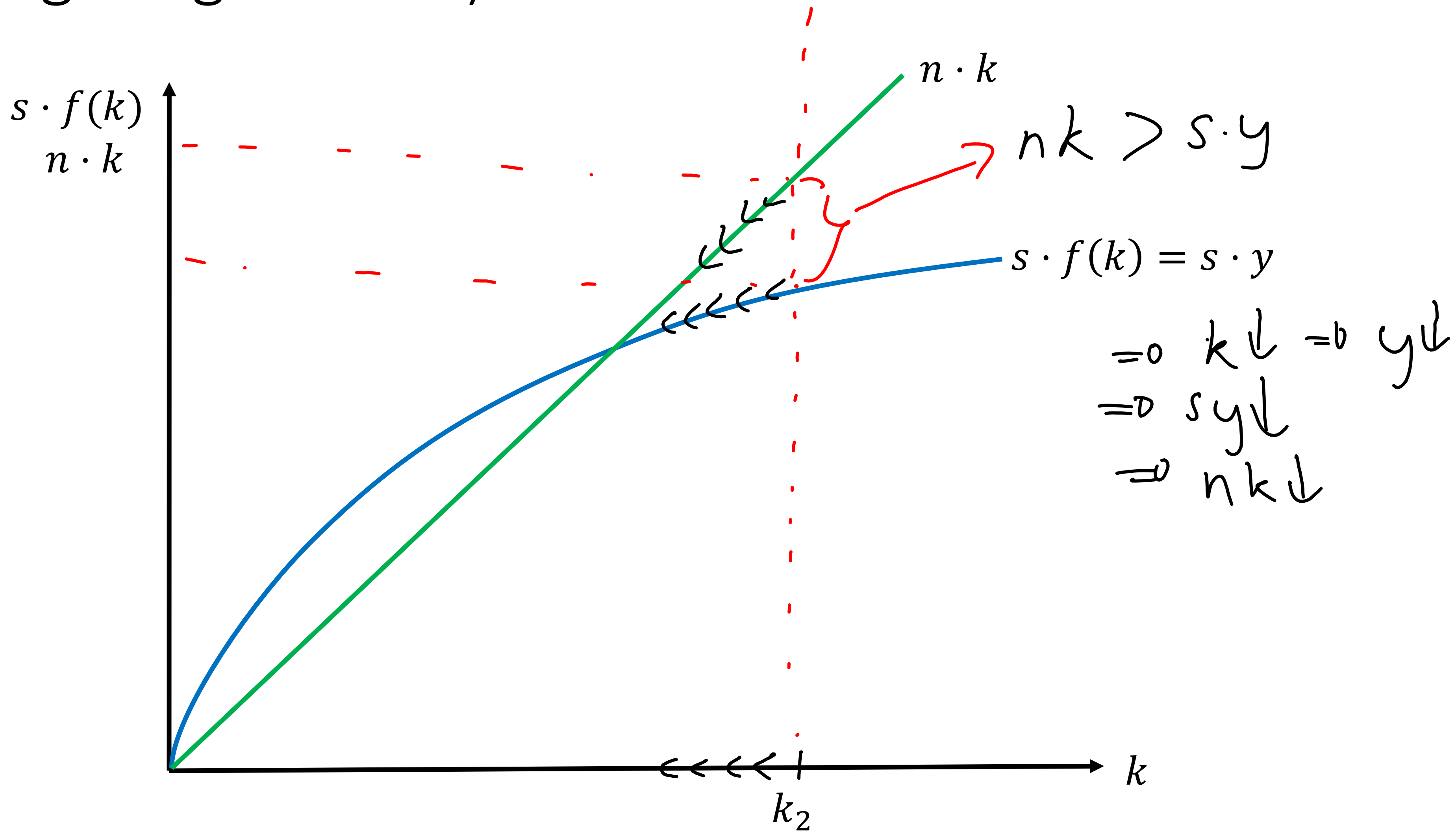
Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



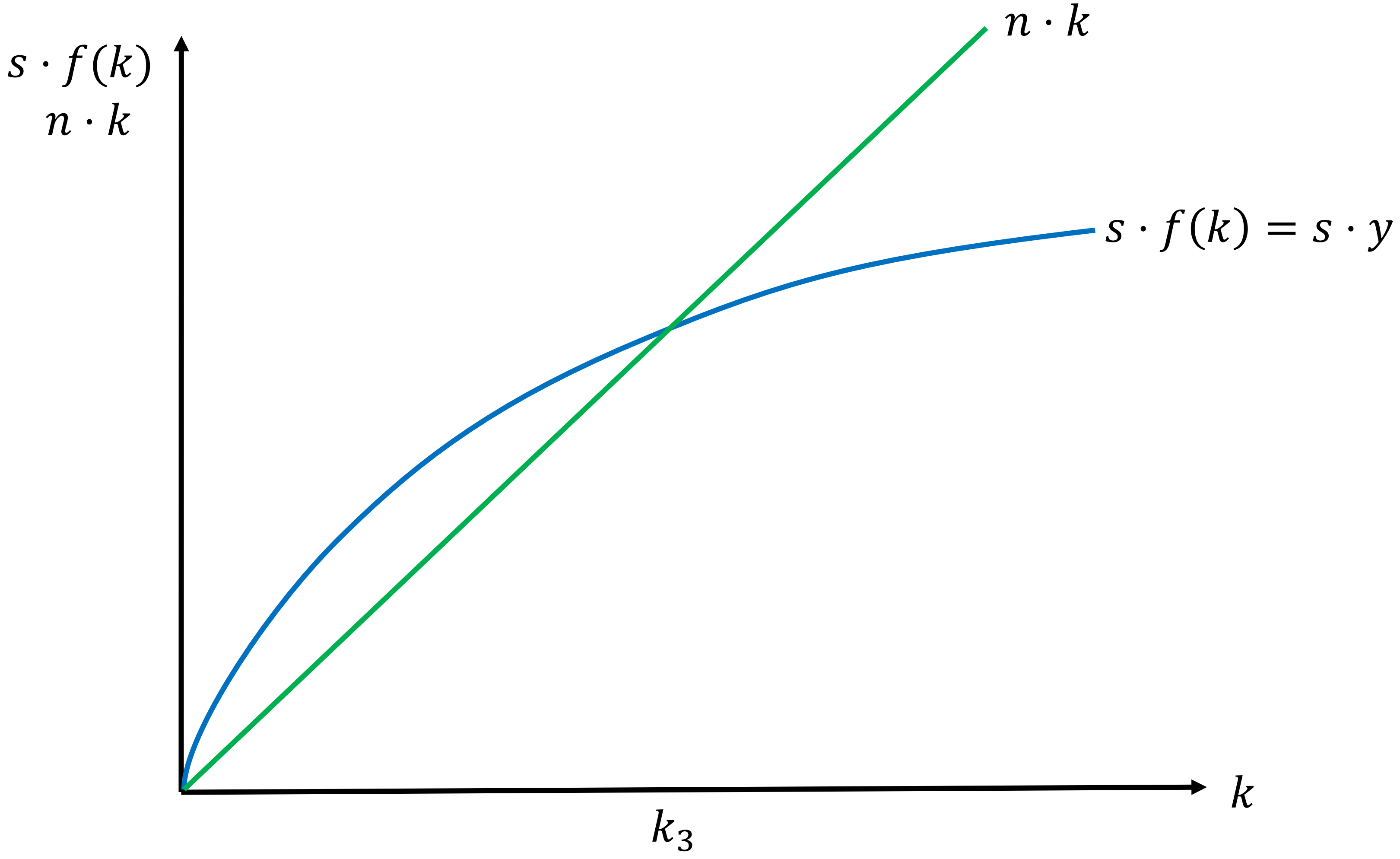
Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



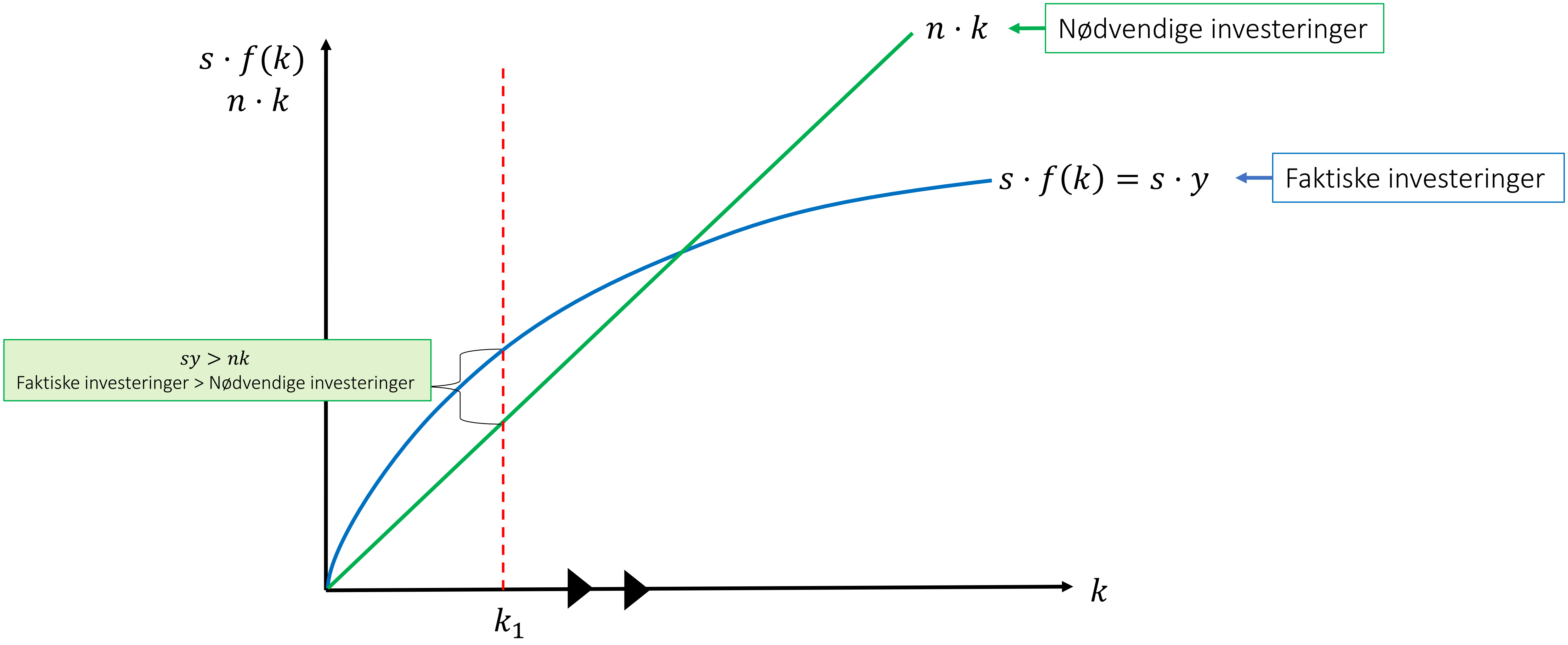
Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



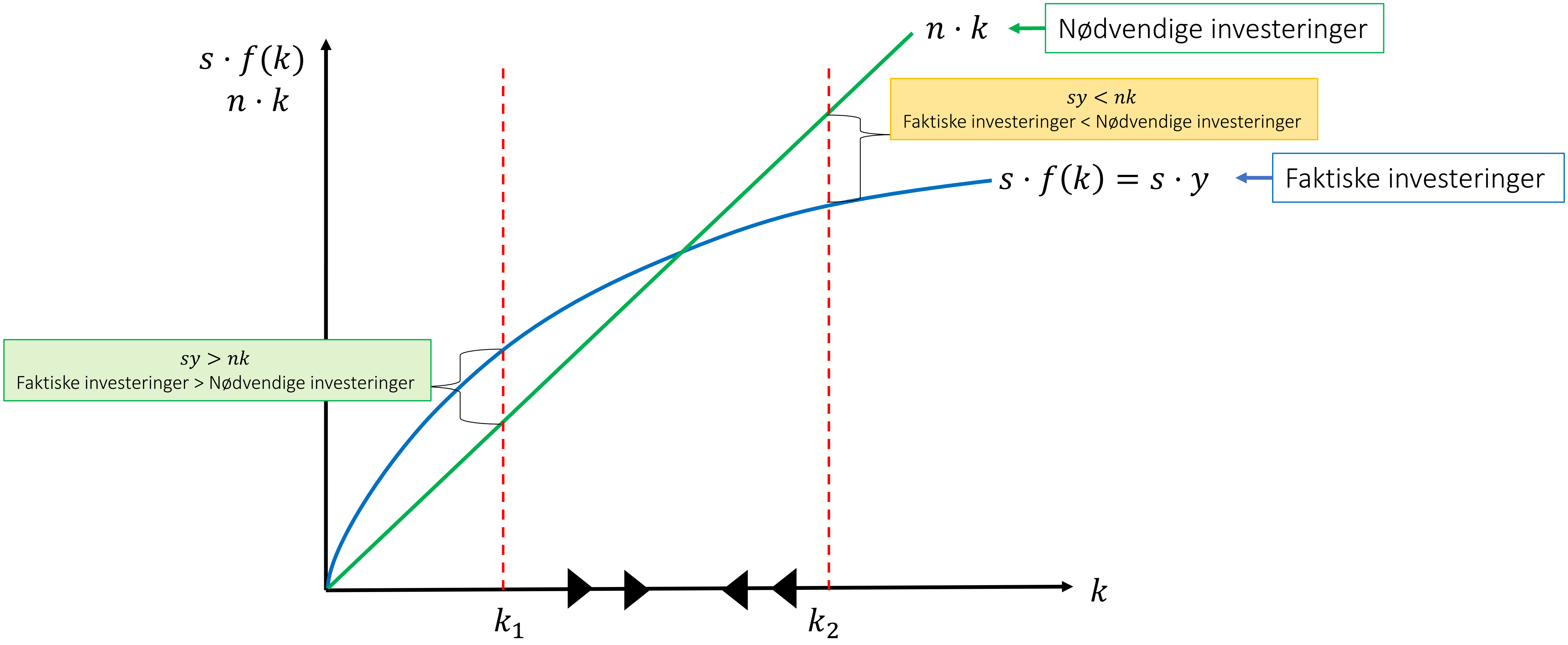
Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



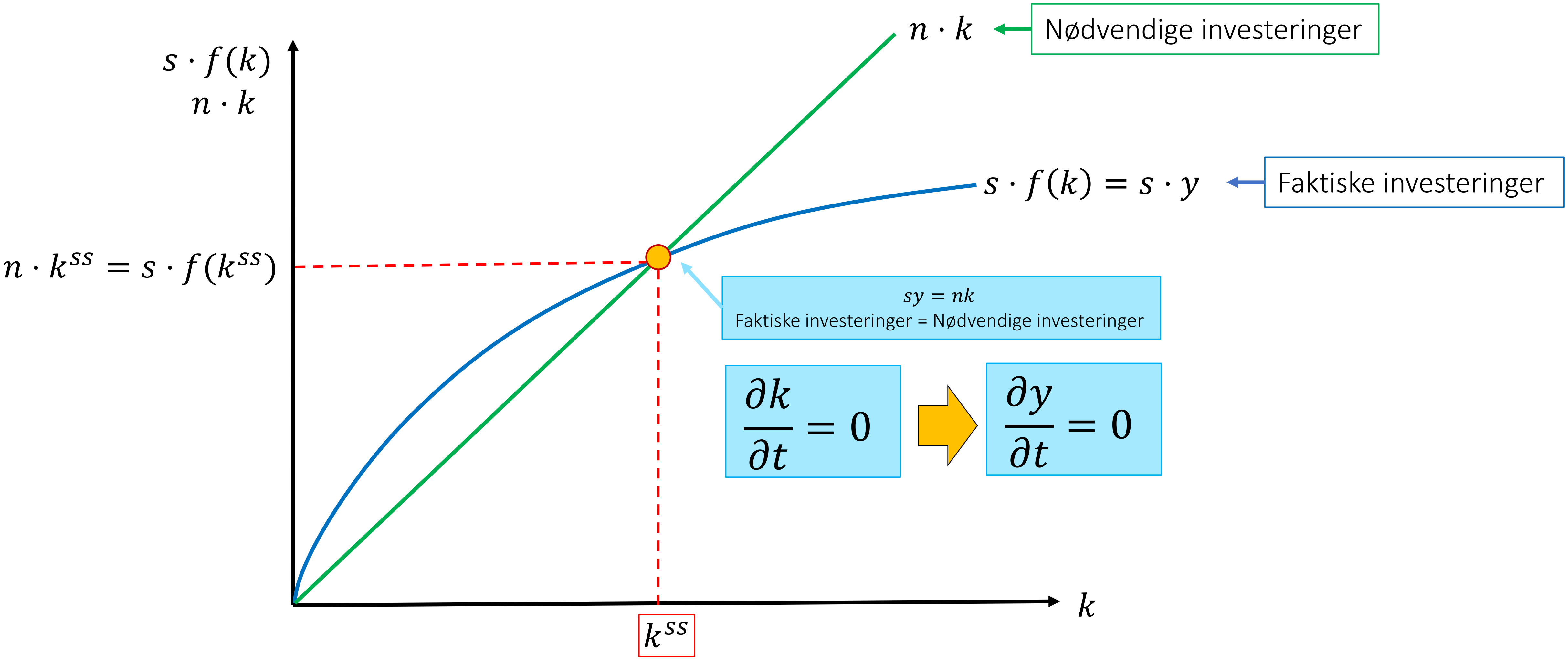
Solow-modellen BAS

Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



Solow-modellen BAS

Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?



Solow-modellen BAS

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Matematisk utledning av y^{ss}:

Antakelse: $Y(t) = K(t)^{\alpha} \cdot L(t)^{1-\alpha}$

Hva bestemmer <u>nivået</u> på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Matematisk utledning av y^{ss}:

$$y(t) = k(t)^{\alpha}$$

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} = s \cdot y(t) - n \cdot k(t)$$

Så lenge faktiske investeringer er **større** enn nødvendige, vil veksten i kapitalintensiteten være positiv

Så lenge faktiske investeringer er **mindre** enn nødvendige, vil veksten i kapitalintensiteten være negativ

Hva bestemmer nivået på BNP per arbeider på lang sikt (i langsiktig likevekt)?

Utfordring:

1. Utled produksjon per arbeider (y) i steady state (matematisk)
2. Hvilke faktorer bestemmer nivået på BNP per arbeider i steady state?
3. Evaluere effekten av en økt sparerate i steady state (grafisk og matematisk). Gi økonomisk intuisjon!
4. Hva er veksten i BNP per arbeider i steady state?